

Bài 1: NHẮC LẠI VÀ BỔ SUNG CÁC KHÁI NIỆM VỀ HÀM SỐ

A. Lý thuyết

I. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ

+ Nếu đại lượng y phụ thuộc vào một đại lượng x thay đổi sao cho mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số

+ Hàm số có thể được cho bằng bảng hoặc bằng công thức,..

Ví dụ:

y là hàm số của x được cho dưới dạng bảng:

x	2	1/2	3	1
y	4	8	1/6	1

y là hàm số của x được cho dưới dạng công thức:

$y = 2x$; $y = x + 2$; $y = x$

+ Hàm số thường được ký hiệu bởi những chữ $f, g, h, \dots$ chẳng hạn khi y là hàm số của biến số x , ta viết $y = f(x)$ hoặc $y = g(x), \dots$

+ $f(a)$ là giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = a$. Khi hàm số y được cho bởi công thức $y = f(x)$, muốn tính giá trị $f(a)$ của hàm số tại $x = a$, ta thay $x = a$ vào biểu thức $f(x)$ rồi thực hiện các phép tính trong biểu thức.

Ví dụ:

Ta có hàm số $y = f(x) = x + 2$. Khi đó $f(1) = 1 + 2 = 3$

+ Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì y được gọi là một hàm hằng.

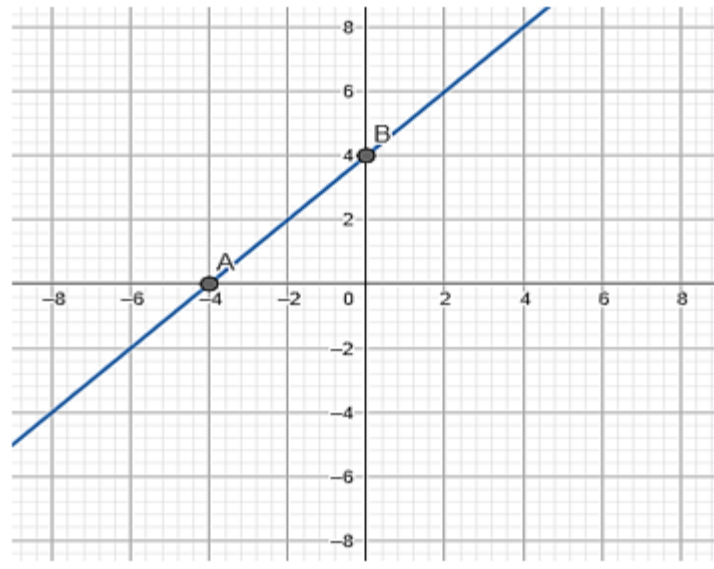
Ví dụ:

Ta có $y = f(x) = 1$. Khi đó với giá trị nào của x thì $y = 1 \rightarrow$ khi đó y là hàm hằng.

II. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Tập hợp các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ:



Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x) = x + 4$.

Các cặp giá trị tương ứng trên mặt phẳng tọa độ là $A(-4; 0)$; $B(0; 4)$.

III. HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, HÀM SỐ NGHỊCH BIẾN.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$

+ Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị của $f(x)$ tương ứng cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (gọi tắt là hàm số đồng biến).

+ Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị của $f(x)$ tương ứng giảm đi thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (gọi tắt là hàm số nghịch biến).

Nói cách khác, cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ta có:

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đồng biến.

+ Nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số nghịch biến.

Ví dụ:

Cho hàm số $y = x + 2$, xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2$ hay $f(x_1) < f(x_2)$ nên hàm số $y = x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$

Chú ý: Khi $b = 0$ ta có hàm số $y = ax$ (đã học ở lớp 7)

Ví dụ: Cho các hàm số

$y = 2x;$ $y = x + 1;$ $y = (1/2)x + 2;$

$y = 3x + 1;$ $y = 4x - 1;$ $y = 2 - 3x;$

Đây là các hàm số bậc nhất.

II. TÍNH CHẤT

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi giá trị của x thuộc $\mathbb{R}$. Có các tính chất như sau:

+ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$

+ Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$

Ví dụ 1: Cho các hàm số sau: $y = 3x + 2$, $y = -x + 1$, $y = (1/2)x + 1$; $y = -\sqrt{3}x$ Hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến ?

Hàm số đồng biến là: $y = 3x + 2$; $y = (1/2)x + 1$

Hàm số nghịch biến là: $y = -x + 1$; $y = -\sqrt{3}x$

Ví dụ 2: Xác định m để hàm số $y = (m - 1)x + 2$ đồng biến

Giải:

Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$

Vậy với $m > 1$ thì hàm số đã cho đồng biến

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = 2x^2 + 3$. Hàm số này có phải hàm số bậc nhất không?

Giải:

Vì hàm số bậc nhất có dạng là $y = ax + b$ nên hàm số đã cho $y = 2x^2 + 3$ không phải là hàm số bậc nhất

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = ax + 1$. Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;2)$. Tìm giá trị của a ?

Giải:

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;2)$ nên ta có: $2 = a.1 + 1 \Rightarrow a = 1$

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm

B. Bài tập tự luận

Câu 1: Xác định đường thẳng đi qua hai điểm A và B biết $A(-2; 0)$ và $B(0; 1)$

Giải

Giả sử đường thẳng đó có dạng:

$$y = ax + b \text{ với } a \neq 0$$

A và B thuộc đường thẳng nên ta có:

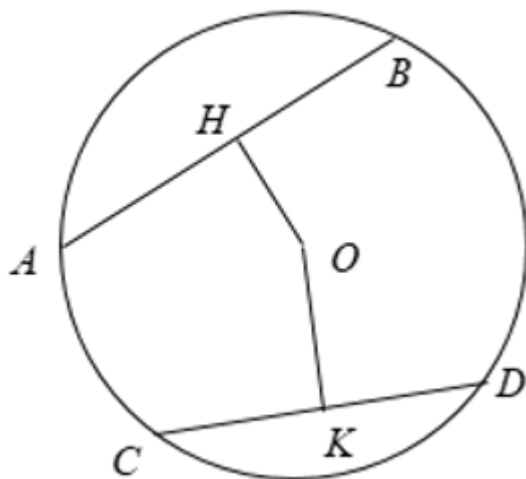
$$\begin{cases} 0 = a(-2) + b \\ 1 = a.0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng cần tìm là: $y = \frac{1}{2}x + 1$

HÌNH HỌC

Bài 3:LIÊN HỆ GIỮA DÂY VÀ KHOẢNG CÁCH TỪ TÂM ĐẾN DÂY

1. Định lý 1



Trong một đường tròn:

a) Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

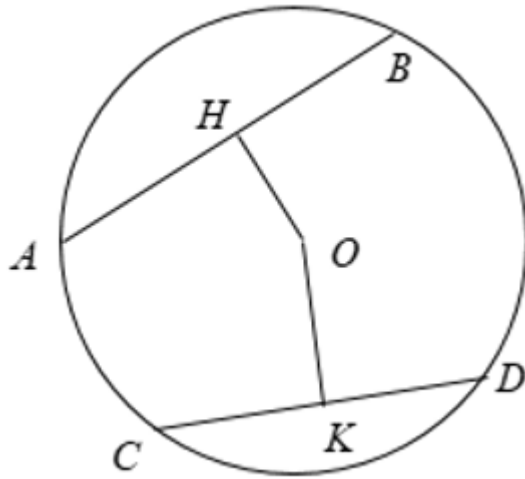
b) Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

Áp dụng vào hình vẽ như sau:

Ta có $OH \perp AB$; $OK \perp CD$.

$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$

2. Định lý 2



Trong hai dây của một đường tròn:

a) Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

b) Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

Áp dụng vào hình vẽ như sau:

Ta có: $OA = OB = OC = OD = R$

$OH < OK \Rightarrow AB > CD$

Do

$$\begin{cases} HB = \sqrt{R^2 - OH^2} \\ KD = \sqrt{R^2 - OK^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2} \\ CD = 2\sqrt{R^2 - OK^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow AB > CD$ (vì $OH < OK$).

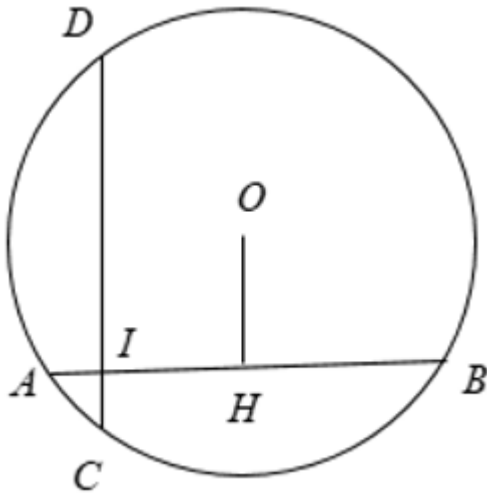
3. Ví dụ cụ thể

Câu 1: Cho đường tròn tâm O có bán kính là 5cm, dây AB dài 8cm.

a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB.

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1\text{cm}$. Kẻ dây CD qua I vuông góc với AB. Chứng minh rằng $CD = AB$

Hướng dẫn:



a) Gọi H là trung điểm của AB.

$$\underline{AH = HB = AB/2 = 4\text{ cm}}$$

$$\underline{\Rightarrow OH \perp AB.}$$

Khi đó:

$$\underline{OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3}$$

b) Điểm I nằm giữa A và H nên: $AI + IH = AH$

$$\underline{\text{suy ra: } IH = AH - AI = 4 - 1 = 3\text{ cm}}$$

Từ O kẻ $OK \perp CD$.

Ta có OKIH là hình chữ nhật mà có $OH = IH = 3\text{cm} \Rightarrow$ OKIH là hình vuông

Nhận xét: Khoảng cách từ O đến AB bằng khoảng cách từ O đến CD nên

Giải thích:

$$\begin{cases} KD = \sqrt{R^2 - OK^2} \\ HA = \sqrt{R^2 - OH^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} CD = 2KD = 2\sqrt{R^2 - OK^2} \\ AB = 2HA = 2\sqrt{R^2 - OH^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow AB = CD$ (vì $OH = OK$).

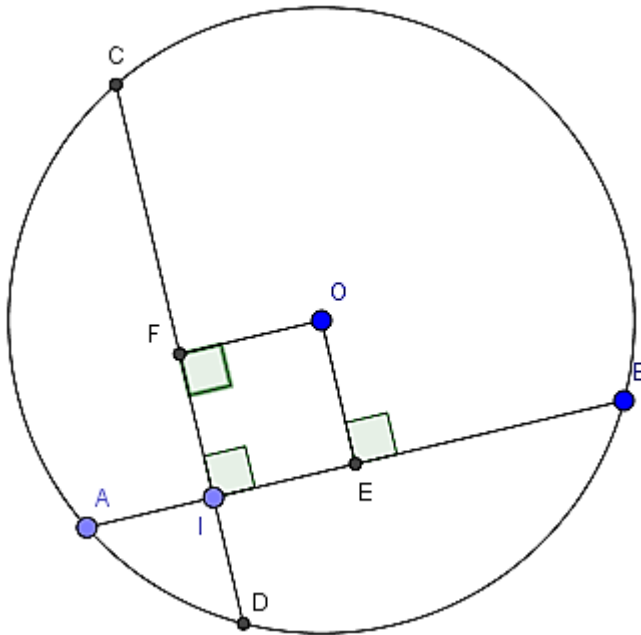
B. Bài tập tự luận

Câu 1: Cho đường tròn tâm O bán kính là 5, dây $AB = 8$

a) Tính khoảng cách từ O đến AB

b) Gọi I là điểm thuộc dây AB sao cho $AI = 1$, kẻ dây CD đi qua I vuông góc với AB. Chứng minh rằng $AB = CD$

Giải



a) Gọi E là hình chiếu của O lên AB

Khoảng cách từ O đến AB chính là độ dài đoạn OE

Ta có: $OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3(cm)$

b) Gọi F là hình chiếu của O lên CD

Khi đó khoảng cách của O đến CD chính là OF

Tứ giác OFIE có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

Do đó: $OF = EI = AE - AI = 4 - 1 = 3$

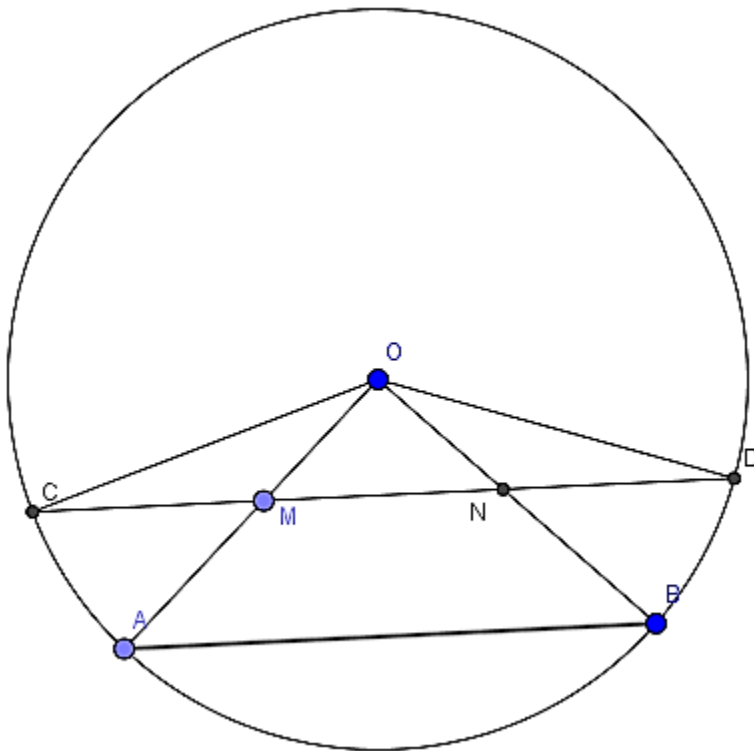
Suy ra $OE = OF$ theo định lí 1 nên $AB = CD$

Câu 2: Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy các điểm A và B trên đường tròn. Trên bán kính OA, OB lấy các điểm M, N sao cho $OM = ON$. Vẽ dây CD đi qua MN; M giữa C và N

a) Chứng minh: $CM = DN$

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$

Giải



a) Xét hai tam giác COM và DON có:

$$OM = ON(gt); \widehat{OCM} = \widehat{ODN} \text{ (} \triangle OCD \text{ cân)}$$

$$OC = OD; \widehat{OMC} = \widehat{OND}$$

$$\text{Do đó: } \triangle COM = \triangle DON \Rightarrow DN = CM$$

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên MN

Đặt $OH = x$ nên $OM = x\sqrt{2}$

Vì tam giác OMN vuông cân nên

$$HN = OH = x \Rightarrow DH = 3x$$

Do tam giác OHD vuông nên

$$OH^2 + HD^2 = OD^2 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = R^2$$

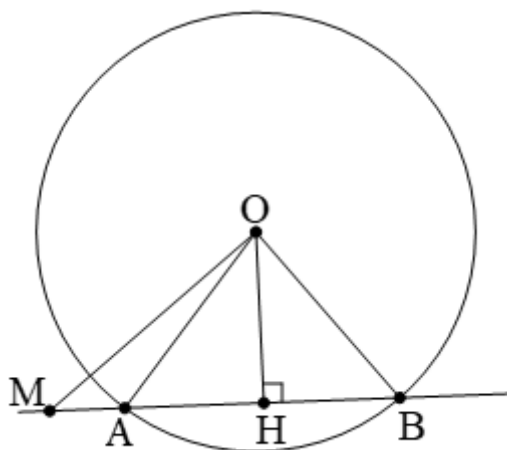
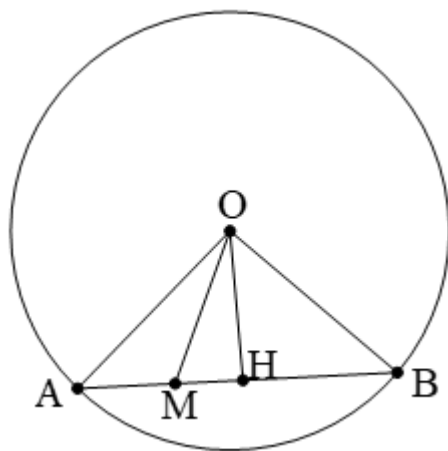
$$\Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{10}} \Rightarrow OM = \frac{R}{\sqrt{5}}$$

Bài 4: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Ba vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

a) Đường thẳng và đường tròn cắt nhau

Khi một đường thẳng có hai điểm chung A, B với đường tròn (O) ta nói đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt. Khi đó ta có những kết quả quan trọng sau:



$$+ OH \perp AB \Rightarrow OH < R, HA = HB = \sqrt{R^2 - OH^2}.$$

Theo định lý Pitago ta có: $OH^2 = MO^2 - MH^2$

Mặt khác ta cũng có: $OH^2 = R^2 - AH^2$ nên suy ra

$$MO^2 - MH^2 = R^2 - AH^2 \Leftrightarrow MH^2 - AH^2 = MO^2 - R^2$$

$$\Leftrightarrow (MH - AH)(MH + AH) = MO^2 - R^2$$

+ Nếu M nằm ngoài đoạn AB thì $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$

+ Nếu M nằm trong đoạn AB thì $MA \cdot MB = R^2 - MO^2$

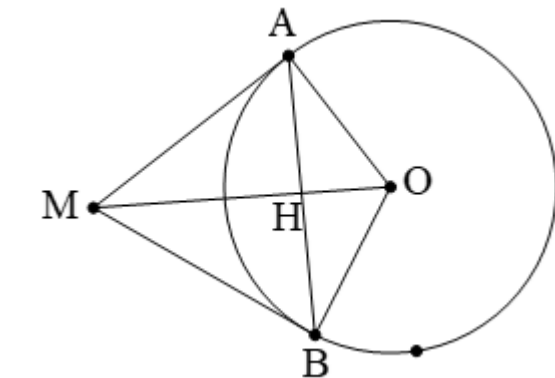
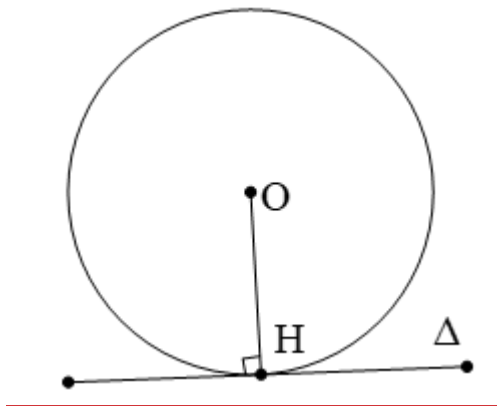
Mối liên hệ khoảng cách và dây cung: $R^2 = OH^2 + AB^2/4$

b) Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.

Khi một đường thẳng Δ chỉ có một điểm chung H với đường tròn (O), ta nói đường thẳng tiếp xúc với đường tròn, hay Δ là tiếp tuyến của đường tròn (O). Điểm H gọi là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O)

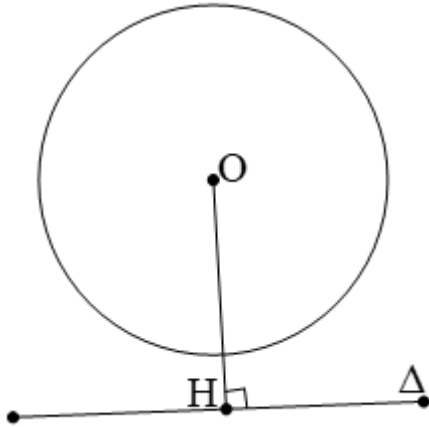
Như vậy nếu Δ là tiếp tuyến của (O) thì Δ vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm

Ta có $OH = R$



c) Đường thẳng và đường tròn không giao nhau

Khi một đường thẳng Δ và đường tròn (O) không có điểm chung ta nói đường thẳng Δ và đường tròn (O) không giao nhau. Khi đó $OH > R$



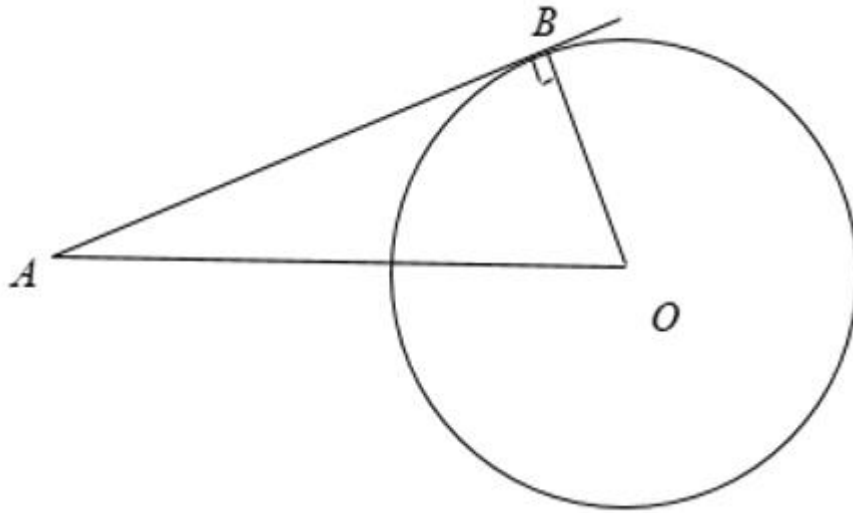
2. Hệ thức giữa khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng và bán kính của đường tròn

Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

3. Ví dụ cụ thể

Câu 1: Cho đường tròn tâm O bán kính bằng 6cm và một điểm A cách O 10cm. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (B là tiếp điểm). Tính độ dài đoạn AB.

Hướng dẫn:



$OA = 10\text{cm} \Rightarrow A$ nằm ngoài đường tròn

Ta có: AB là tiếp tuyến, B là tiếp điểm, khi đó $OB = R = 6\text{cm}$.

$AB \perp OB$ áp dụng định lý Py – ta – go ta có:

$$\underline{AB^2 + OB^2 = OA^2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\text{cm} .$$

Vậy $AB = 8\text{cm}$

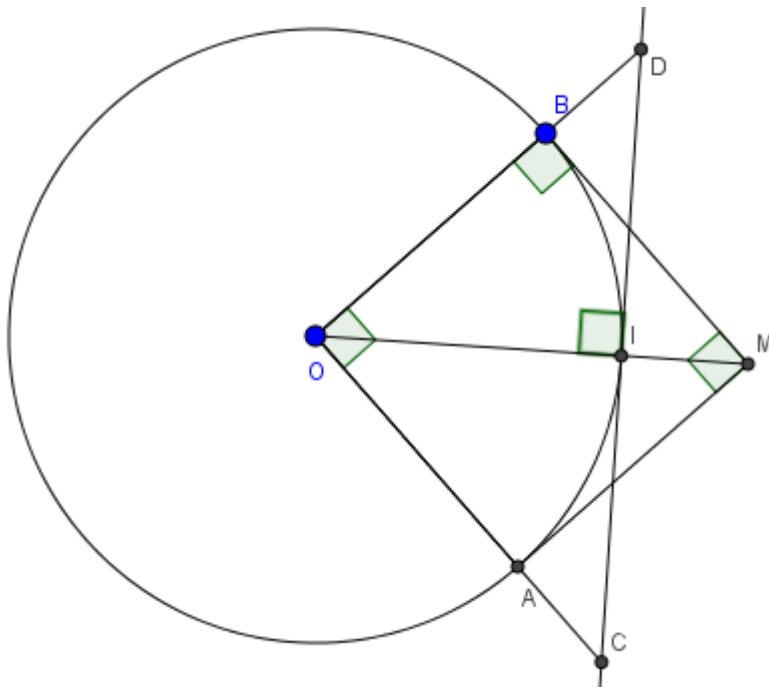
B. Bài tập tự luận

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm H sao cho $BH = BA$, qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BD cắt AD tại O

a) So sánh OA , OH và HD

b) Xác định vị trí tương đối của BD với $(O; OA)$

Giải



a) Ta có: MA, MB là hai tiếp tuyến nên khoảng cách từ O đến MA và MB lần lượt là OA và OB (do A, B là các tiếp điểm duy nhất với (O))

Từ đó ta có: $OA \perp MA, OB \perp MB$

Tứ giác OAMB có 3 góc vuông và $OA = OB = R$ nên OAMB là hình vuông

$\Rightarrow MA = MB = R = 5$

b) Dễ dàng chứng minh

$$\triangle OAM = \triangle OBM \Rightarrow \widehat{BOM} = \widehat{AOM} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 45^\circ$$

Tam giác OID vuông tại I và có $\widehat{IOD} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle OID$ vuông cân và $OI = ID$

Tương tự: $IO = IC$

$\Rightarrow CD = 2.OI = 2R = 10$